DIAGONALISASI SECARA UNITER PADA MATRIKS HERMITIAN ORDO 5×5 DAN 6×6

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh

NURHASIMAH
10854002839

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2013

DIAGONALISASI SECARA UNITER PADA MATRIKS HERMITIAN ORDO 5×5 DAN 6×6

NURHASIMAH
10854002839

Tanggal Sidang: 02 Juli 2013
Periode Wisuda: November 2013

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Matriks hermitian A adalah suatu matriks yang memiliki entri-entri bilangan kompleks yang memenuhi A = A^* dan matriks uniter A yaitu matriks dengan aturan A^{-1} = A^*. Matriks hermitian A dapat didiagonalkan apabila memenuhi persamaan $P^{-1}AP$ dan menghasilkan matriks diagonal D dengan unsur bilangan riil. Tujuan dari tugas akhir ini yaitu untuk mendiagonalkan matriks hermitian secara uniter pada ordo 5×5 dan 6×6. Pada tugas akhir ini penulis memberikan dua contoh untuk matriks hermitian ordo 5×5 dan juga dua contoh untuk matriks hermitian ordo 6×6. Berdasarkan pembahasan dan analisa yang telah dilakukan pada matriks hermitian dengan contoh yang telah diberikan maka diperoleh matriks diagonal D, yang berarti bahwa matriks hermitian dapat didiagonalisasikan secara uniter.

Katakunci: *Diagonalisasi, Matriks Hermitian, Matriks Uniter.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, dengan rasa Syukur kepada Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat, Nikmat serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul "**Diagonalisasi Secara Uniter pada Matriks Hermitian Ordo 5×5 dan 6×6".** Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan untuk memperoleh gelar sarjana. Shalawat beserta salam semoga tetap tercurahkan kepada Rasulullah SAW, semoga Beliau selalu senantiasa menjadi teladan bagi seluruh umat manusia, sehingga kelak kita mendapatkan syafa'atnya dihari akhir nanti.

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian tugas akhir ini banyak halangan dan kesulitan yang penulis hadapi. Tapi berkat bantuan dan dorongan serta motivasi dari berbagai pihak maka tugas akhir ini dapat terselesaikan. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada orang tua tercinta ibunda yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian dan do'a serta dukungan dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. DR. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Pembimbing yang telah banyak membantu, mendukung, mengarahkan dan membimbing penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku Penguji 1 dan yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga tugas akhir ini selesai.
6. Semua Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

7. Seluruh keluarga, abang (Marzuki, Gusnar Efendi, Riswan, dan Sarwedi,), kakak (Masdelima), adik (Hasrul dan Nasri Andi), yang telah memberikan perhatian serta semangat kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir.
8. Seluruh teman-teman yang ada di Pondokan Sumayyah, Ririn, Rubi, Reni, Ifah, Yuli, Ara, Amanah, Azi, Mega, Metra, Bunga, Fatmi, Naita, Tina, Yarni, dan endang, yang telah memberi banyak masukan, motivasi dan perhatian sehingga tugas akhir ini dapat selesai.
9. Terima kasih kepada teman-teman seperjuangan terutama untuk teman-teman Jurusan Matematika Angkatan 2008, atas motivasinya dan semoga kita tetap bersama-sama dalam mengejar cita-cita.
10. Seluruh pihak yang telah memberikan motivasi kepada penulis dalam proses penulisan tugas akhir ini sampai selesai yang tidak dapat disebutkan namanya satu persatu.

Penulis telah berusaha mencapai hasil yang semaksimal mungkin dalam pembuatan tugas akhir ini, namun semua ini tidak pernah luput dari kesalahan dan Kekurangan. Maka Penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang sifatnya membangun demi kesempurnaan tugas akhir ini ke arah yang lebih baik.

Harapan Penulis semoga tugas akhir ini bermanfaat bagi siapa saja yang cinta dengan ilmu. Mudah-mudahan Allah SWT selalu mencurahkan nikmat dan rahmat-Nya kepada kita semua. *Amin……………………ya rabbal'alamin.*

Pekanbaru, 02 Juli 2013

NURHASIMAH

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matriks merupakan salah satu cabang dari ilmu Aljabar Linier yang memiliki peran yang sangat penting di dalam matematika. Pentingnya peranan matriks ini dapat dilihat dari begitu banyaknya penggunaan matriks dalam berbagai bidang antara lain aljabar, statistika, metode numerik, persamaan diferensial dan lain-lain.

Matriks memiliki ragam jenis dan ukuran yang berbeda-beda. Ukuran matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom dari suatu matriks. Jika suatu matriks A mempunyai m baris dan n kolom maka matriks dinyatakan dengan $m \times n$ dan dinotasikan dengan $A_{m\times n}$. Jika banyak baris dari suatu matriks sama dengan banyak kolom, $m = n$ maka matriksnya dinamakan matriks bujur sangkar.

Matriks bujur sangkar merupakan salah satu syarat dalam menentukan diagonalisasi dalam sebuah matriks. Diagonalisasi matriks banyak diterapkan dalam berbagai ilmu matematika, misalnya penerapan diagonalisasi matriks dalam irisan kerucut dan persamaan differensial dimana dalam penerapannya diagonalisasi dilakukan pada matriks dengan unsur riil (Selamed, 2008).

Penerapan diagonalisasi juga dapat dilakukan pada matriks dengan unsur bilangan kompleks. Diagonalisasi pada matriks kompleks dapat dilakukan pada matriks hermitian. Matriks hermitian A merupakan matriks bujur sangkar dengan unsur bilangan kompleks yang memenuhi sifat $A = A^*$ dengan A^* adalah matriks konjugat transpos dari A.

Salah satu manfaat dari diagonalisasi pada matriks kompleks khususnya pada matriks Hermitian dengan ordo 2×2 adalah sebagai pengaman pesan rahasia. Diagonalisasi matriks kompleks yang lebih besar pada matriks hermitian dengan ordo 3×3 dan 4×4 telah dilakukan oleh Selamed (2008) yaitu pada penelitiannya yang berjudul "*Diagonalisasi secara Uniter pada Matriks Hermite*".

Berdasarkan uraian di atas maka penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian tersebut dengan ordo matriks yang lebih besar dengan judul ***"Diagonalisasi Secara Uniter pada Matriks Hermitian Ordo*** **5×5 dan 6×6".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah "Bagaimana hasil diagonalisasi secara uniter pada matriks hermitian dengan ordo 5×5 dan 6×6 ?".

1.3 Batasan Masalah

Agar penulisan skripsi ini tidak meluas, maka dibutuhkan pembatasan masalah dalam pembahasannya, yaitu hanya pada matriks hermitian dengan diagonal utamanya adalah bilangan riil.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah untuk memperoleh hasil diagonalisasi secara uniter pada matriks hermitian dengan ordo 5×5 dan 6×6.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Dapat menambah pengalaman dalam penerapan dari suatu materi yang telah diperoleh selama perkuliahan.
2. Diharapkan dapat menambah sarana informasi bagi pembaca dan sebagai bahan referensi bagi pihak yang membutuhkan.
3. Dari kajian dan tujuan masalah dalam penelitian ini, maka diharapkan dapat memberikan manfaat untuk memperdalam pemahaman mengenai matriks, matriks hermitian, invers matriks, diagonalisasi, dan mengembangkan

wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji suatu permasalahan dalam matriks.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam pembuatan tugas akhir ini mencakup lima bab yaitu sebagai berikut :

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan teori-teori yang bersangkutan dengan matriks dan jenis-jenis matriks, operasi matriks, determinan dan invers matriks, ruang vektor kompleks, nilai eigen dan vektor eigen, diagonalisi matriks, proses Gram-Schmidt, matriks uniter, matriks hermitian dan matriks normal.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan cara-cara atau langkah-langkah dalam diagonalisasi secara uniter pada matriks hermitian ordo 5×5 dan 6×6.

BAB IV Pembahasan

Bab ini membahas tentang hasil yang diperoleh untuk mendiagonalisasikan matriks secara uniter pada matriks hermitian ordo 5×5 dan 6×6.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran dari seluruh pembahasan.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks dan Jenis Matriks

Matriks adalah suatu kumpulan dari elemen-elemen yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk persegi panjang, dengan panjang dan lebar ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom. Elemen-elemen suatu matriks secara umum dilambangkan dengan a_{ij} , i menyatakan baris, sedangkan j menyatakan kolom matriks. Setiap matriks terdiri atas satu atau sejumlah baris dan kolom.

Matriks yang terdiri atas m baris dan n kolom dinamakan matriks berukuran $m \times n$ atau matriks berordo $m \times n$ dengan demikian baris dan kolom suatu matriks menunjukkan ukuran atau ordo atau dimensi dari matriks yang bersangkutan. Matriks yang jumlah baris sama dengan jumlah kolom ($m = n$) dinamakan matriks bujur sangkar (*square matrix*) berukuran $n \times n$ dan ditulis dalam bentuk berikut:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} = (a_{ij})$$

Dengan $i, j = 1,2, \ldots n$, dan a_{11} , $a_{22}, \ldots, a_{nn}$ adalah elemen diagonal utama.

Berdasarkan ukuran dan bentuk matriks yang berbeda-beda maka matriks memiliki beberapa jenis dan bentuk. Di bawah ini adalah beberapa jenis-jenis matriks diantaranya:

1. Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar adalah matriks yang memiliki baris dan kolom yang sama banyak. Matriks bujur sangkar $n \times n$ dikatakan sebagai matriks dengan orde n atau matriks bujur sangkar-n.

2. Matriks Identitas

Matriks identitas atau matriks satuan ialah matriks bujursangkar yang semua unsurnya adalah nol kecuali pada diagonal utamanya memiliki nilai satu.

3. Matriks Diagonal

Matriks bujursangkar $D = \; d_{ij}$ disebut matriks diagonal jika seluruh entri nondiagonalnya adalah nol.

2.2 Operasi Matriks

Operasi matriks memiliki peranan penting dalam menyelesaikan berbagai masalah dalam matriks. Bentuk-bentuk operasi matriks tersebut diantaranya ialah pengurangan matriks, penjumlahan matriks, perkalian matriks dengan skalar dan perkalian matriks dengan matriks. Penggunaan operasi terdebut dapat disesuaikan dengan kebutuhan yang diperlukan.

a. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Matriks yang dapat dijumlahkan dan dikurangkan hanya dapat dilakukan pada matriks yang memiliki ukuran yang sama. Penjumlahan dan pengurangan matriks dilakukan pada entri-entri matriks yang bersesuaian.

Definisi 2.1 (**Anton dan Rorres, 2004**) Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah (*sum*) $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A dan selisih (*difference*) $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B.

Contoh 2.1

Diberikan matriks $A = \begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{matrix} \quad dan \quad B = \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix}$

$$maka \;\; A + B = \begin{matrix} 4 & 5 & 2 \\ 6 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 6 \end{matrix} \quad dan \quad A - B = \begin{matrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{matrix}$$

b. Perkalian Matriks dengan Skalar

Perkalian matriks juga dapat dilkukan dengan skalar. Dalam perkalian matriks dengan skalar dilakukan dengan mengalikan seluruh entri dari matriks dengan skalar.

Definisi 2.2 (**Anton dan Rorres, 2004**) Jika A suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan c.

Contoh 2.2

Misalkan matriks $A = \begin{matrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{matrix}$,

kemudian diberikan 2 yang merupakan skalar, maka perkalian matriks dengan scalar ialah

$$2A = \begin{matrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{matrix} .$$

Jika B adalah sebarang matriks, maka $-B$ akan menyatakan hasil kali $(-1)B$. Jika A dan B adalah dua matriks yang ukurannya sama, maka $A - B$ didefinisikan sebagai jumlah $A + \quad -B \; = A + \quad -1 \; B$.

c. Perkalian Matriks

Perkalian matriks dengan matriks dapat dilakukan apabila jumlah kolom dari matriks pertama harus sama dengan jumlah baris dari matriks kedua. Jika syarat di atas tidak terpenuhi maka matriks tersebut tidak dapat dikalikan.

Definisi 2.3 (**Anton dan Rorres, 2004)** Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. kemudian kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan tambahkanlah hasil kali dari perkalian yang dihasilkan.

Contoh 2.3

Diketahui matriks $A = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix} \quad dan \quad B = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{matrix}$

maka perkalian matriks $AB = \begin{matrix} 6 & 5 & 10 \\ 19 & 10 & 25 \end{matrix}$.

2.3 Determinan dan Invers

Determinan dan invers merupakan langkah-langkah yang dibutuhkan dalam diagonalisasi. Determinan digunakan dalam menentukan nilai eigen dari suatu matriks. Sedangkan invers dapat ditentukan apabila matriks tersebut mempunyai nilai determinan tidak sama dengan nol.

a. Determinan

Salah satu syarat determinan ialah harus matriks yang berbentuk bujur sangkar, jika tidak maka determinan tidak dapat diketahui. Penghitungan determinan dapat dilakukan dengan berbagai metode, diantaranya metode sarrus dan dengan opersasi baris elemnter.

Definisi 2.4 (**Anton dan Rorres, 2004**) Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar. Fungsi determinan (*determinant function*) dinotasikan dengan *det* dan didefinisikan $det(A)$ sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari A. Angka $det(A)$ disebut determinan dari A.

Determinan berordo 1, berordo 2, dan berordo 3 didefinisikan sebagai berikut:

$$|a_{11}| = a_{11} \quad \text{dan} \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Contoh 2.4

Diberikan matriks $A = \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 0 \end{matrix}$

Tentukanlah determinan dari matriks A?

Penyelesaian:

Maka $det\ A = \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 0 \end{matrix}$

$$= 1\ 3\ \ 0 + 2\ -1\ \ 1 + 1\ -1\ \ -6 - 2\ -4\ \ 0 - 1\ -1\ \ 3 - 1(3)(3)$$

$= 0 + 2 + 6 - 0 - (-3) - 9$

$= 2.$

b. Invers Matriks

Matriks yang memiliki invers ialah matrik yang dapat dibalik atau matriks singular. Penghitung matriks dapat dilakukan dengan menggunakan metode cramer, dengan operasi baris elementer dan dengan menggunakan adjoin.

Definisi 2.5 (**Anton dan Rorres, 2004**) Misalkan A merupakan suatu matriks kuadrat dengan n baris dan n kolom dan I_n suatu identitiy matriks. Apabila ada matriks bujur sangkar $A - 1$ sedemikian rupa sehingga berlaku hubungan sebagai berikut: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, maka A^{-1} disebut *invers matrix* A.

Sifat-sifat invers:

1. Misalkan dua matriks non-singular A dan B, akan ditunjukkkan bahwa perkalian dari dua buah matriks yang non-singular akan non singular dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ yaitu invers dari hasil kali dua buah matriks non-singular AB merupakan hasil kali invers masing-masing matriks, secara terbalik.
2. Jika A suatu matriks non-singular kemudian $(A^{-1})^{-1} = A$ yaitu invers dari invers matriks merupakan matriks itu sendiri. Hal ini jelas oleh karena $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (apabila matriks yang diketahui A^{-1} dan bukan A).
3. Identitas matriks mempunyai invers dirinya sendiri artinya: $I_n I_n{}^{-1} = I_n$ maka $I_n{}^{-1} = I_n$.
4. Invers suatu transpos matriks A ialah transpos invers, yaitu $A^{T}{}^{-1} = -1^{T}$.

Untuk menentukan invers dari matriks A yang sama yang dapat dibalik, maka dapat dicari menggunakan operasi baris elementer yang mereduksi A menjadi identitas dan melakukan urutan operasi yang sama terhadap I_n untuk memperoleh A^{-1}.

Contoh 2.5

Tentukanlah invers matriks dari:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Dalam penyelesian dilakukan dengan operasi baris elementer sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tambahkan (-2) kali baris pertama ke baris ke dua, dan tambahkan (-1) kali baris pertama ke baris ketiga.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tambahkan (2) kali baris kedua ke baris ketiga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Kalikan baris ketiga dengan (-1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Tambahkan (3) kali baris ketiga kebaris kedua, dan tambahkan (-3) kali baris ketiga ke baris pertama.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Tambahkan (-2) kali baris kedua kebaris pertama

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Maka invers matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen dan vektor eigen sangat berperan penting dalam proses diagonalisasi. Solusi dari persamaan nilai eigen berkaitan erat dalam menentukan apakah matriks tersebut dapat ditransformasikan dalam bentuk diagonal.

Definisi 2.6 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x,

$$Ax = \lambda x$$

untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ.

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka kita menuliskannya kembali $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda Ix$$

$$Ax - \lambda Ix = 0$$

$$A - \lambda I \ x = 0$$

dari persamaan di atas dapat diselesaikan jika $det(\lambda I - A) = 0$ dan persamaan ini disebut persamaan karakteristik.

Contoh 2.6

Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{matrix}$$

maka akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A.

Penyelesaian:

1. Akan ditentukan polinomial karakteristik dari matriks A adalah

$$det \ \lambda I - A = 0$$

$$det \begin{matrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & \lambda + 1 \end{matrix} = 0$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

2. Selanjutnya akan ditentukan nilai eigen dari matriks A, yaitu dengan menentukan solusi-solusi bilangan bulatnya sehingga $\lambda^2(\lambda - 1) = 0$, sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks A adalah: $\lambda = 1$ dan $\lambda = 0$

3. Menetukan vektor-vektor eigen dari matriks A dengan menggunakan operasi baris elementer, berdasarkan persamaan, $(\lambda I - A) = 0$ yaitu:

$$\begin{array}{cccc} \lambda - 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda + 1 & 0 \end{array} \qquad (2.1)$$

Maka akan ditentukan vektor eigen dari nilai λ yang didapatkan.

a. Untuk $\lambda = 0$ dan berdasarkan persamaan (2.1) maka diperoleh:

$$\begin{array}{cccc} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Dan akan diselesaikan menggunakan operasi baris elementer sebagai berikut:

Kalikan $\frac{1}{2}$ pada baris pertama

$$\begin{array}{cccc} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \frac{1}{2} b_1$$

Tambahkan baris kedua ke baris pertama, dan tambahkan baris ketiga ke baris pertama

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ b_2 + b_1 \\ b_3 + b_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Maka diperoleh:

$-x_1 - x_3 = 0.$

Dimisalkan nilai $x_3 = s$ dan nilai $x_2 = t$ maka $x_1 = -s$, sehingga akan dibentuk vektor-vektor eigen sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} = \begin{array}{c} -s \\ t \\ s \end{array} = \begin{array}{c} -s \\ 0 \\ s \end{array} + \begin{array}{c} 0 \\ t \\ 0 \end{array} = s \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} + t \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

maka vektor-vektor eigen untuk $\lambda = 0$ adalah

$$P_1 = \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \quad \text{dan} \quad P_2 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

b. Untuk $\lambda = 1$ dan berdasarkan persamaan (2.1) maka diperoleh:

$$\begin{matrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{matrix}$$

Kemudian akan diselesaikan menggunakan operasi baris elementer sebagai berikut:

$$\begin{matrix} -1 & 0 & -2 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & b_2 + b_1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & b_3 + b_1 \end{matrix}$$

Tambahkan baris kedua dengan baris pertama dan tambahkan baris ketiga dengan baris pertama.

$$\begin{matrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Maka diperoleh:

$-x_1 - 2x_3 = 0$

$x_2 - x_3 = 0$

dimisalkan nilai $x_3 = s$, maka $x_1 = -2s$ dan $x_2 = s$, maka nilai x_1, x_2, x_3 adalah

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} = \begin{matrix} -2s \\ s \\ s \end{matrix} = s \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

sehingga vektor eigen untuk $\lambda = 1$ adalah: $P_3 = \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$

2.5 Bilangan Kompleks

Himpunan bilangan komplek dilambangkan dengan . pasangan suatu bilangan kompleks adalah pasangan beurutan bilangan real (a, b) dimana kesamaan penjumlahan, dan perkalian didefinisikan sebagai berikut:

$a, b = c, d$ jika dan hanya jika $a = b\ dan\ b = d$

$a, b + c, d = (a + c, b + d)$

$a, b\ .\ c, d = (ac - bd,\ ad + bc)$

Definisi 2.7 (Hasugian dan Prijono, 2006) Bilangan kompleks z adalah pasangan terurut (x, y) dari bilangan nyata (riil) x dan y, dan dituliskan sebagai berikut: $z = x, y = x + iy$, i disebut sebagai satuan imajiner, $i = \sqrt{-1}$, dan

x disebut sebagai bilangan riil dan y disebut sebagai bilangan imajiner, dan ditulis sebagai berikut: $x = Re\, z$, $y = Im\ z$.

Bilangan konjugat kompleks dengan notasi $\bar{z}$ dari bilangan kompleks $z = x + iy$ didefinisikan sebagai $\bar{z} = x - iy$.

Teorema 2.1 (Anton dan Rorres, 2004) Untuk sebarang bilangan kompleks, maka $z\bar{z} = |z|^2$.

Bukti Jika $z = x + yi$, maka

$$z\bar{z} = \quad x + yi \quad x - yi \quad = x^2 - xyi + yxi - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

2.6 Ruang Vektor Kompleks

Ruang vektor yang skalar-skalarnya dapat berupa bilangan kompleks disebut ruang vektor kompleks. Kombinasi linier yang berada di dalam sebuah ruang vektor kompleks didefinisikan secara tepat sebagaimana halnya vektor-vektor yang berada di dalam sebuah vektor riil, hanya saja skalar-skalarnya yang dapat berupa bilangan kompleks.

a. Kombinasi linear

Sebuah vektor w disebut sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_r$ jika w dapat dinyatakan dalam bentuk:

$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r$, dengan $k_1, k_2, \ldots, k$ adalah bilangan –bilangan kompleks.

Jika $v_1, v_2, \ldots, v_r$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor V dan jika masing-masing vektor pada V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear, $v_1, v_2, \ldots, v_r$ maka dikatakan bahwa vektor-vektor ini merentang V.

b. Bebas linear

Vektor-vektor yang bebas linear ialah vektor-vektor yang merupakan kombinasi linear. Dikatakan bebas linear apabila pemecahan dari sitem persamaan linear tersebut tepat satu atau solusi tunggal.

Definisi 2.8 (**Anton dan Rorres, 2004**) Jika $S = \quad v_1, v_2, \ldots, v_r$ adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r = 0$ mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yakni $k_1 = 0$, $k_2 = 0, \ldots, k_r = 0$, Jika ini adalah satu-

satunya pemecahan, maka S dikatakan himpunan bebas linear. Jika ada pemecahan lain, maka S dinamakan himpunan tak bebas linear.

Contoh 2.7

Himpunan vektor $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ dengan $v_1 = (2, -1, 0, 3)$, $v_2 = (1, 2, 5, -1)$, $v_3 = (7, -1, 5, 8)$ adalah himpunan tak bebas linear, karena $3v_1 + v_2 - v_3 = 0$.

Contoh 2.8

Diberikan vektor-vektor $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, dan, $k = (0,0,1)$ pada R^3. Akan ditentukan vektor-vektor $S = \{i, j, k\}$ bebas linier.

Penyelesaian:

$$k_1 i + k_2 j + k_3 k = (0,0,0)$$
$$k_1 (1,0,0) + k_2 (0,1,0) + k_3 (0,0,1) = (0,0,0)$$

Dari penyelesaian diatas, maka diperoleh $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ sehingga himpunan $S = \{i, j, k\}$ adalah bebas linier.

c. Basis dan dimensi

Suatu basis adalah generalisasi ruang vektor dari suatu system koordinat pada ruang berdimensi 2 dan ruang berdimensi 3. Syarat dari basis ialah harus bebas linear dan merentang.

Definisi 2.9 (**Anton dan Rorres, 2004**) Jika V adalah sebarang ruang vektor dan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor pada V, maka S dinamakan basis untuk V jika :

a. S bebas linear.

b. S merentang V.

Dimensi sebuah ruang vektor V yang berdimensi berhingga didefinisikan sebagai banyaknya vektor pada basis untuk V.

Contoh 2.9

Tentukan basis dan dimensi untuk ruang pemecahan dari sistem persamaan linier homogen berikut :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}-3x_4} + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \phantom{{}-3x_4} - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

Dengan operasi baris elementer maka didapatkan pemecahan sebagai berikut:

$$x_1 = -s - t,\ x_2 = s,\quad x_3 = -t,\ x_4 = 0,\ x_5 = t$$

Sehingga vektor-vektor pemecahan tersebut dapat didefinisikan sebagai

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Yang memperlihatkan bahwa vektor-vektor

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ adalah basis dan berdimensi dua

Dari vektor tersebut akan dibuktikan bahwa v_1 dan v_2 adalah bebas linier dan merentang, dengan himpunan vektor $S = \{v_1, v_2\}$ dengan $v_1 = (-1,1,0,0,0)$, $v_2 = (-1,0,-1,0,1)$ kemudian :

$$k_1(-1,1,0,0,0) + k_2(-1,0,-1,0,1) = (0,0,)$$

Dari persamaan diatas maka diperoleh $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, sehingga himpunan S dikatakan bebas linear dan merentang. Karena vektor-vektor tersebut merupakan bebas linear dan merentang maka pemecahan sistem persamaan di atas menghasilkan basis dan berdimensi dua.

2.7 Diagonalisasi Matriks

Diagonalisasi matriks merupakan cara dalam membentuk matriks diagonal dari suatu matriks. Syarat utama dari matriks yang dapat didiagonalisasi adalah matriks bujur sangkar dan memiliki nilai determinan yang tidak sama dengan nol. Diagonalisassi matriks dapat dilakukan pada matriks dengan unsur riil maupun kompleks.

Definisi 2.10 (**Anton dan Rorres, 2004)** Sebuah matriks bujur sangkar A dikatakan dapat didiagonalisasikan jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal, matriks P dikatakan mendiagonalisasi A.

Prosedur untuk mendiagonalisasikan sebuah matriks A:

1. Akan ditentukan n vektor eigen dari A yang bebas linier, misalkan $P_1, P_2, \ldots, P_n$
2. Selanjutnya akan dibentuk sebuah matriks P dengan $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sebagai vektor-vektor kolomnya.
3. Matriks $P^{-1}AP$ kemudian akan menjadi diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonalnya secara berurutan, dimana λ_i adalah nilai eigen yang terkait dengan P_i untuk $i = 1, 2, \ldots, n$

Contoh 2.10

Tentukan sebuah matriks P yang mendiagonalisasi matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A

a. Polinomial karakteristik matriks A adalah

$det(\lambda I - A) = 0$ maka

$$det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga polinomial karakteristik A adalah

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$

Berdasarkan polinomial karakteristik dari A maka diperoleh nilai eigen dari A yaitu

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$.

b. Berdasarkan nilai eigen yang diperoleh maka akan ditentukan vektor eigen dari A.

$(\lambda I - A) = 0$ maka

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.2)$$

Untuk $\lambda = 2$ maka bedasarkan persamaan (2.2) menjadi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sehingga matriks diatas dapat dilakukan operasi baris elementer sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} b_3 + b_2$$

Tambahkan baris ketiga dengan baris pertama

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} b_1 + (-2)b_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Tambahkan baris pertama dengan (-2) baris ke dua

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

maka diperoleh:

$-x_1 - x_3 = 0$

Dimisalkan nilai $x_2 = s$ dan $x_3 = t$, maka $x_1 = -t$, sehingga nilai x_1, x_2, x_3 adalah

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

maka vektor-vektor eigen untuk $\lambda = 2$ adalah

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dan } P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya untuk $\lambda = 1$ dan berdasarkan persamaan (2.2) maka didapat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

kemudian akan diselesaikan menggunakan operasi baris elementer sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad b_3 + b_1$$

Tambahkan baris ketiga dengan baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b_2 + b_1$$

Tambahkan baris kedua dengan baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dimisalkan nilai $x_3 = t$, maka $x_1 = -2t$ dan $x_2 = t$

Sehingga vektor eigennya: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

maka vektor eigen untuk $\lambda = 1$ adalah:

$$P_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sehingga didapat matriks P, dimana matriks P mendiagonalisasikan matriks A dan $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, dan untuk membuktikannya dapat menggunakan pembuktian di bawah ini:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \\ &= D \end{aligned}$$

2.8 Proses Gram-Schmidt

Proses gram-schmidt dilakukan untuk mendapatkan matriks yang orthogonal dan ortonormal.

Misalkan $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah basis dari ruang hasil kali dalam V. kemudian kita akan menentukan basis orthogonal $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ dari V dengan langkah-langkahsebagai berikut:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

$$\vdots$$

$$w_n = v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_n, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \cdots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\langle w_{n-1}, w_{n-1} \rangle} w_{n-1}$$

dengan $k = 2,3, \ldots, n$, didefinisikan :

$$w_k = v_k - c_{k1} w_1 - c_{k2} w_2 - \cdots - c_{k,k-1} w_{k-1}.$$

Pembentukan persamaan di atas dikenal sebagai proses ortogonalitas Gram-Schmidt.

2.9 Matriks Uniter, Matriks Hermitian dan Matriks Normal

Matriks-matriks dengan entri bilangan kompleks memiliki beberapa bentuk dan jenis, diantaranya matriks uniter, matriks hermitian, dan matriks normal. Matriks hermitian merupakan bentuk lain dari matriks simetri riil hanya saja pada matriks hermitian terdiri dari unsur bilangan kompleks.

Definisi 2.11 (**Anton dan Rorres, 2006**) Matriks uniter jika A adalah sebuah matriks yang memiliki entri-entri bilangan kompleks, maka transpos konjugat matriks A, yang dinotasikan dengan A^*, didefinisikan sebagai $A^* = \overline{A}^T$ dimana $\overline{A}$ adalah sebuah matriks yang entri-entrinya adalah konjugat-konjugat kompleks dari entri-entri yang bersesuaian pada matriks A dan $\overline{A}^T$ adalah transpos dari matriks $\overline{A}$.

Contoh 2.11

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{bmatrix}$

Maka konjugat dari A adalah $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & i & 0 \\ 2 & 3+2i & -i \end{bmatrix}$

dan uniter dari matriks A adalah:

$$A^* = \overline{A}^T = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.12 (**Anton dan Rorres, 2006**) Jika $u = u_1, u_2, \ldots, u_n$ dan $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah vektor-vektor pada C^n, maka hasilkali dalam Euclidean kompleks antara keduanya, $u.v$, didefinisikan sebagai

$u.v = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n$, dengan $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ adalah konjugat-konjugat dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Definisi 2.13 (**Anton dan Rorres, 2006**) Norma Euclidean atau panjang Euclidean sebuah vektor $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ pada C^n sebagai

$$\|u\| = (u.v)^{1/2} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2},$$

dan kita mendefinisikan jarak Euclidean antara titik-titik $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dengan $v = v_1, v_2, \ldots, v_n$ sebagai

$$d\ u, v = \|u - v\| = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2 + \cdots + |u_n - v_n|^2}$$

Definisi 2.14 (**Anton dan Rorres, 2006**) Sebuah matriks bujur sangkar A dengan entri-entri kompleks disebut Uniter (*Unitary*) jika $A^{-1} = A^*$.

Contoh 2.12

Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{matrix}$$

Apakah matriks A merupakan matriks uniter?

Penyelesaian:

Diketahui bahwa Matriks A Memiliki vektor-vektor baris sebagai berikut:

$$r_1 = \frac{1+i}{2}, \frac{1+i}{2}\ ,\ r_2 = \frac{1-i}{2}, \frac{-1+i}{2}$$

Akan dibuktikan bahwa A relatif terhadap hasilkali dalam euklidean pada C^n atau hasilkali dalam pada ruang vektor n. Berdasarkan definisi 2.12 maka diperoleh

$$\|r_1\| = \sqrt{\frac{1+i}{2}^2 + \frac{1+i}{2}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\ \frac{1}{2} - \frac{i}{2} + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\ \frac{1}{2} - \frac{i}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$= 1$$

$$\|r_2\| = \sqrt{\left(\frac{1-i}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+i}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(\frac{-1}{2} - \frac{i}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$= 1$$

dan

$$r_1 \,.\, r_2 = \left(\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{1-\bar{i}}{2}\right) + \left(\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{-1+\bar{i}}{2}\right) = 0.$$

Sehingga vektor-vektor baris ini membentuk sebuah himpunan ortonormal pada C^2. Dengan demikian, A adalah uniter dan

$$A^{-1} = A^* = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.15 (**Anton dan Rorres, (2006**) Sebuah matriks bujur sangkar A yang entri-entrinya bilangan kompleks disebut matriks hermitian jika $A = A^*$.

Matriks hermitian merupakan bentuk lain dari matriks simetri pada matriks dengan unsur bilangan riil. Pada matriks dengan elemen riil, matriks simetri didefinisikan dengan $A = A^T$, sama halnya dengan matriks hermitian yaitu $A = A^*$, dimana A^* merupakan transpos konjugat dari A.

Contoh 2.13

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}$

Apakah matriks A merupakan matriks hermitian?

Penyelesaian:

Berdasarkan matriks A diatas, maka konjugat dari A adalah

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & -5 & 2+i \\ 1+i & 2-i & 3 \end{bmatrix}$$

dan transpos konjugat dari A adalah

$$A^* = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}$$

Karena $A = A^* = \bar{A}^T$ maka A adalah matriks hermitian.

Definisi 2.16 (**Anton dan Rorres, 2006**) Sebuah matriks bujur sangkar A dengan entri-entri kompleks disebut matriks normal jika $AA^* = A^*A$.

Setiap matriks hermitian A merupakan matriks normal karena $AA^* = AA = A^*A$ dan setiap matriks uniter A adalah matriks normal karena $AA^* = I = A^*A$.

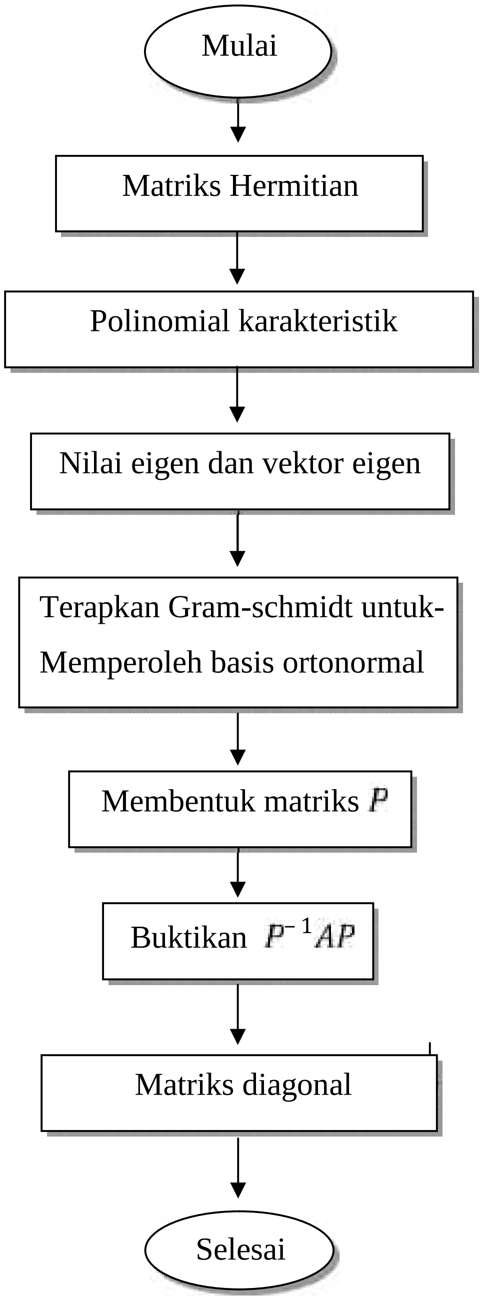
BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah studi literatur yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti jurnal-jurnal, atau makalah-makalah dan buku-buku yang bersangkutan. Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku aljabar linear, dan buku-buku matematika lain yang mendukung penelitian.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk mendiagonalisasi matriks hermitian secara uniter dengan ordo 5×5 dan 6×6 ialah sebagai berikut:

1. Diketahui matriks hermitian dengan ordo 5×5 dan 6×6.
2. Menentukan polinomial karakteristik dari matriks A
3. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A.
4. Menerapkan proses Gram-schmidt untuk mendapatkan basis ortonormal.
5. Membentuk matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor basis yang dibangun pada langkah 4.
6. Membuktikan P dengan menunjukkan $P^{-1}AP$, dimana P^{-1} adalah matriks konjugat dari transpos P, maka P mendiagonalisasi A secara uniter.

Langkah-langkah di atas juga dapat dilihat pada *flowchart* berikut ini :



Gambar 3.1 *Flowchart* Metodologi Penelitian

BAB IV

ANALISA DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan bagaimana hasil dalam mendiagonalisasikan suatu matriks hermitian secara uniter sesuai dengan langkah-langkah yang telah dijelaskan pada Bab III metodologi penelitian. Adapun prosedur dalam mendiagonalisasikan matriks hermitian secara uniter pada bab ini akan jelaskan dengan memberikan beberapa contoh yaitu pada matriks hermitian ordo 5×5 dan 6×6.

4.1 Diagonalisasi Matriks Hermitian

Matriks hermitian merupakan salah satu contoh dari matriks kompleks yang dapat di diagonalisasikan secara uniter. Anggota diagonal utama dari matriks hermitian adalah bilangan riil.

Diagonalisasi matriks hermitian berarti membentuk matriks yang diagonal dari matriks hermitian yang telah diketahui. Matriks hermitian dapat didiagonalisasikan secara uniter apabila kita telah mendapatkan matriks yang ortogonal atau pada kompleks dikatakan uniter.

Definisi 4.1 (**Anton dan Rorres, 2006**) Sebuah matriks bujursangkar A dengan entri-entri kompleks dikatakan secara uniter dapat didiagonalkan (*unitarily diagonalizable*) apabila terdapat sebuah matriks uniter P yang sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ (= P^*AP) adalah matriks diagonal, dan matriks P dikatakan secara uniter mendiagonalisasi A.

Teorema 4.1 (**Anton dan Rorres, 2006**) Nilai-nilai eigen dari sebuah matriks hermitian adalah bilangan-bilangan real.

Bukti : Jika λ adalah sebuah nilai eigen dan v adalah vektor eigen yang terkait dengan sebuah matriks hermitian A, yang berukuran $n \times n$ maka

$$Av = \lambda v$$

Apabila dikalikan kedua belah sisi persamaan diatas dengan v^* dan kemudian mengacu pada teorema 2.5 untuk menuliskan $v^*v = ||v||^2$ maka diperoleh

$$v^*Av = v^*\ \lambda v = \lambda v^*v = \lambda ||v||^2$$

Berdasarkan persamaan di atas maka $\lambda = \frac{v^*Av}{||v||^2}$ hal ini menunjukkan bahwa λ adalah bilangan riil dan dapat dilakukan dengan menunjukkan bahwa entri v^*Av adalah bilangan riil, yaitu dengan menunjukkan bahwa matriks v^*Av adalah hermitian, karena matriks-matriks hermitian memiliki entri-entri bilangan riil pada diagonal utamanya. Sehingga $(v^*Av)^* = v^*A^*(v^*)^* = v^*Av$ adalah merupakan hermitian.

4.2 Diagonalisasi secara Uniter Ordo 5×5

Matriks hermitian dapat didiagonalisasikan secara uniter dengan langka-langkah yang telah dijelaskan pada bab metodologi penelitian. Selanjutnya akan dijelaskan diagonalisasi pada matriks hermitian untuk ordo 5×5 melalui contoh berikut:

Contoh 4.1

Diberikan matriks $B = \begin{matrix} 1 & 0 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-i & 0 & 0 \\ 1+i & 3+i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2+i \\ 0 & 0 & 0 & -2-i & -1 \end{matrix}$

Tentukan matriks P yang mendiagonalisasikan matriks B secara uniter?

Penyelesaian:

1. Menentukan apakah matriks tersebut merupakan matriks hermitian dengan membuktikan $B = B^{*}$

$$B = \begin{matrix} 1 & 0 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-i & 0 & 0 \\ 1+i & 3+i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2+i \\ 0 & 0 & 0 & -2-i & -1 \end{matrix}$$

$$\overline{B} = \begin{matrix} 1 & 0 & -1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3+i & 0 & 0 \\ 1-i & 3-i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2-i \\ 0 & 0 & 0 & -2+i & -1 \end{matrix}$$

Sehingga $\overline{B}^T = B^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-i & 0 & 0 \\ 1+i & 3+i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2+i \\ 0 & 0 & 0 & -2-i & -1 \end{bmatrix} = B$

Karena $B = B^{*}$ maka matriks B dikatakan matriks hermitian.

2. Menentukan polinomial karakteristik dari matriks B

   Dengan menggunakan Maple.13 maka diperoleh polinomial karakteristik dari matriks B yaitu $\lambda^5 - 6\lambda^4 - 7\lambda^3 + 56\lambda^2 + 36\lambda - 80 = 0$

3. Menentukan nilai eigen dari matriks B dengan memfaktorkan polinomial dari matriks B. Berdasarkan polinomial karakteristik dari B maka didapat nilai eigen dari B yaitu:

   $\lambda^5 - 6\lambda^4 - 7\lambda^3 + 56\lambda^2 + 36\lambda - 80 = 0$

   $(\lambda - 5)(\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2 = 0$

   $\lambda = 1, \quad \lambda = 4, \quad \lambda = 5 \quad \text{dan} \quad \lambda = -2$

4. Menentukan vektor eigen

   Berdasarkan nilai eigen yang didapat maka akan ditentukan vektor-vektor eigen dari B. dengan persamaan sebagai berikut:

   $(\lambda I - B) = 0$, maka

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -3+i & 0 & 0 \\ -1-i & -3-i & \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \lambda-1 & 0 & -1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -3+i & 0 & 0 & 0 \\ -1-i & -3-i & \lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \end{array}\right]$$

   untuk $\lambda = 1$ maka berdasarkan persamaan (4.1) menjadi:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3+i & 0 & 0 & 0 \\ 1+i & -3-i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+i & 2 & 0 \end{array}\right]$$

   Selanjutnya matriks diatas dapat dilakukan operasi baris elementer dan diperoleh vektor eigen untuk $\lambda = 1$, yaitu

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Untuk $\lambda = 4$ maka berdasarkan persamaan (4.1) menjadi:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3+i & 0 & 0 & 0 \\ 1+i & -3-i & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+i & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka diperoleh vektor eigen untuk $\lambda = 4$:

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2+i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

untuk $\lambda = 5$ maka berdasarkan persamaan (4.1) menjadi:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3+i & 0 & 0 & 0 \\ 1+i & -3-i & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+i & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka diperoleh:

$$u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i \\ \frac{3}{4}-\frac{1}{4}i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

untuk $\lambda = -2$ maka berdasarkan persamaan (4.1) menjadi:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3+i & 0 & 0 & 0 \\ 1+i & -3-i & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+i & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka diperoleh:

$$u_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i \\ -1 - \frac{1}{3}i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad u_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Berdasarkan vektor-vektor eigen yang didapat maka akan ditentukan basis orthogonal dengan menggunakan proses gram-schmidt.

a. Menentukan kolom pertama p_1 , sebelummya akan ditentukan $\|u_1\|$ yaitu :

$$\|u_1\| = \sqrt{\|2 - i\|^2 + \|1\|^2}$$
$$= \sqrt{6}$$

maka akan diperoleh p_1 sebagai berikut:

$$p_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b. Menentukan kolom kedua p_2 , sebelummya akan ditentukan $\|u_2\|$ yaitu :

$$\|u_2\| = \sqrt{\|2 - i\|^2 + \|1\|^2}$$
$$= \sqrt{5 + 1}$$
$$= \sqrt{6}$$

maka akan diperoleh p_2 sebagai berikut:

$$p_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-2+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

c. Menentukan kolom ketiga p_3 , sebelummya akan ditentukan $\|u_3\|$ yaitu :

$$\|u_3\| = \sqrt{\left\|-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right\|^2 + \left\|\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i\right\|^2 + \|1\|^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{5}{8} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{4}}$$

maka akan diperoleh p_3 sebagai berikut:

$$p_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{bmatrix} \frac{-1+i}{2\sqrt{7}} \\ \frac{-3-i}{2\sqrt{7}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d. Menentukan kolom keempat p_4 , sebelummya akan ditentukan $\|u_4\|$ yaitu :

$$\|u_4\| = \sqrt{\left|\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right|^2 + \left|-1 - \frac{1}{3}i\right|^2 + \|1\|^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{9} + \frac{10}{9} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{3}}$$

maka akan diperoleh p_4 sebagai berikut:

$$p_4 = \frac{u_4}{\|u_4\|} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{21}} \\ \frac{-3-i}{\sqrt{21}} \\ \frac{3}{\sqrt{21}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e. Menentukan kolom kelima p_5 , sebelummya akan ditentukan $\|u_5\|$ yaitu :

$$\|u_5\| = \sqrt{\left|\frac{2-i}{5}\right|^2 + \|1\|^2}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{5}}$$

maka akan diperoleh p_5 sebagai berikut:

$$p_5 = \frac{u_5}{\|u_5\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-2-i}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan proses gram-scmidt di atas maka diperoleh matriks P yang mendiagonalisasi matriks B sebagai berikut:

$$P = \begin{matrix} \frac{2-i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1+i}{2\sqrt{7}} & \frac{1-i}{\sqrt{21}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{3-i}{2\sqrt{7}} & \frac{-3+i}{\sqrt{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{3}{\sqrt{21}} & 0 \\ 0 & \frac{-2+i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{2-i}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{matrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan apakah matriks P tersebut merupakan vektor-vektor yang ortogonal dan ortonormal dengan pembuktian sebagai berikut:

a. Buktikan bahwa vektor tersebut ortonormal dengan menentukan norma dari vektor baris $P = 1$ sebagai berikut:

$$\|P_1\| = \sqrt{\left(\frac{2-i}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-1+i}{2\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{21}}\right)^2} = 1$$

$$\|P_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{3-i}{2\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{21}}\right)^2} = 1$$

$$\|P_3\| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{21}}\right)^2} = 1$$

$$\|P_4\| = \sqrt{\left(\frac{-2+i}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2-i}{\sqrt{30}}\right)^2} = 1$$

$$\|P_5\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right)^2} = 1$$

b. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa P adalah ortogonal sebagai berikut:

$$P_1.P_2 = \frac{2-i}{\sqrt{6}}.\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{-1+i}{2\sqrt{7}}.\frac{3-\bar{i}}{2\sqrt{7}} + \frac{1-i}{\sqrt{21}}.\frac{1-\bar{i}}{\sqrt{21}} = 0$$

Dengan cara yang sama maka akan diperoleh:

$P_1.P_2 = P_1.P_3 = P_1.P_4 = P_1.P_5 = P_2.P_3 = P_2.P_4 = P_2.P_5 = P_3.P_4 = P_3.P_5 = P_4.P_5 = 0$

Sehingga vektor-vektor baris P membentuk sebuah himpunan ortogonal.

6. Membuktikan P dengan menunjukkan $P^{-1}BP$ adalah matriks diagonal atau $P^{-1}BP = D$:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2+i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2-i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1-i}{2\sqrt{7}} & \frac{3+i}{2\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & 0 & 0 \\ \frac{1+i}{\sqrt{21}} & \frac{-3-i}{\sqrt{21}} & \frac{3}{\sqrt{21}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+i}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

Sehingga $P^{-1}BP = D$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{2+i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2-i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1-i}{2\sqrt{7}} & \frac{3+i}{2\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & 0 & 0 \\ \frac{1+i}{\sqrt{21}} & \frac{-3-i}{\sqrt{21}} & \frac{3}{\sqrt{21}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+i}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-i & 0 & 0 \\ 1+i & 3+i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2+i \\ 0 & 0 & 0 & -2-i & -1 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2-i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1+i}{2\sqrt{7}} & \frac{1-i}{\sqrt{21}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{3-i}{2\sqrt{7}} & \frac{-3+i}{\sqrt{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{3}{\sqrt{21}} & 0 \\ 0 & \frac{-2+i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{2-i}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = D$$

Berdasarkan pembuktian di atas maka jelaslah bahwa matriks B dapat didiagonalisasikan secara uniter oleh matriks P.

Contoh 4.2

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-i & 0 & 0 \\ 1+i & 3+i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan matriks P yang mendiagonalisasikan matriks A secara uniter?

Penyelesaian:

1. Menentukan apakah matriks tersebut merupakan matriks hermitian yaitu dengan membuktikan $A = A^{*}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-i & 0 & 0 \\ 1+i & 3+i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3+i & 0 & 0 \\ 1-i & 3-i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga $\bar{A}^T = A^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-i & 0 & 0 \\ 1+i & 3+i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$

Karena $A = A^*$ maka matriks A dikatakan matriks hermitian.

2. Menentukan polinomial karakteristik dari matriks A
3. Dengan menggunakan Maple.13 maka diperoleh polinomial karakteristik dari matriks A ialah $\lambda^5 - 6\lambda^4 + 2\lambda^3 + 20\lambda^2 - 27\lambda + 10 = 0$
4. Menentukan nilai eigen dari matriks A dengan memfaktorkan polinomial dari matriks A. Berdasarkan polinomial karakteristik dari A maka akan ditentukan nilai eigen dari A yaitu:

   $\lambda^5 - 6\lambda^4 + 2\lambda^3 + 20\lambda^2 - 27\lambda + 10 = 0$

   $(\lambda + 2)(\lambda - 5)(\lambda - 1)^3 = 0$

   Sehingga diperoleh nilai-nilai eigen matriks A sebagai berikut:

   $\lambda = -2$, $\lambda = 5$, dan $\lambda = 1$
5. Menentukan vektor eigen

   Berdasarkan nilai eigen yang didapat maka akan ditentukan vektor-vektor eigen dari A. dengan persamaan sebagai berikut:

   $(\lambda I - A) = 0$, maka

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -3+i & 0 & 0 \\ -1-i & -3-i & \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

   untuk $\lambda = -2$ maka, berdasarkan persamaan (4.2) menjadi:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 0 & -1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3+i & 0 & 0 & 0 \\ -1-i & -3-i & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

   dengan menggunakan operasi baris elementer maka diperoleh:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+\frac{i}{3} \\ 1+\frac{i}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

untuk $\lambda = 5$, berdasarkan persamaan (4.2) maka diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3+i & 0 & 0 \\ -1-i & -3-i & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maka vektor eigen untuk $\lambda = 5$ ialah:

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{i}{4} \\ \frac{3}{4}-\frac{i}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

untuk $\lambda = 1$ maka berdasarkan persamaan (4.2) didapat:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3+i & 0 & 0 \\ -1-i & -3-i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh vektor eigen untuk $\lambda = 1$ sebagai berikut:

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad u_5 = \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Berdasarkan vektor-vektor eigen yang didapat maka akan ditentukan basis orthogonal dengan menggunakan proses gram-schmidt.

a. Menentukan kolom pertama p_1 , sebelummya akan ditentukan $\|u_1\|$ yaitu :

$$\|u_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}-\frac{i}{4}\right)^2 + \|1\|^2 + \|0\|^2 + \|0\|^2}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{4}}$$

maka akan diperoleh p_1 sebagai berikut:

$$p_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{7}} - \frac{1}{2\sqrt{7}}i \\ \frac{3}{2\sqrt{7}} - \frac{1}{2\sqrt{7}}i \\ \frac{2}{\sqrt{7}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. Menentukan kolom kedua p_2 , sebelummya akan ditentukan $\|u_2\|$ yaitu :

$$\|u_2\| = \sqrt{\left\|\frac{-1}{3} + \frac{i}{3}\right\|^2 + \left\|-1 - \frac{i}{3}\right\|^2 + \|1\|^2 + \|0\|^2 + \|0\|^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{9} + \frac{10}{9} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{3}}$$

maka akan diperoleh p_2 sebagai berikut:

$$p_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{21}}i \\ -\frac{3}{\sqrt{21}} - \frac{1}{\sqrt{21}}i \\ \frac{3}{\sqrt{21}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c. Menentukan kolom ketiga dan keempat p_3 dan p_4 yaitu :

$$p_3 = u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p_4 = u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d. Menentukan kolom kelima p_5 , sebelummya akan ditentukan $\|u_5\|$ yaitu :

$$\|u_5\| = \sqrt{\|-2 + i\|^2 + \|1\|^2 + \|0\|^2 + \|0\|^2 + \|0\|^2}$$

$$= \sqrt{5 + 1}$$

$$= \sqrt{6}$$

maka akan diperoleh p_5 sebagai berikut:

$$p_5 = \frac{u_5}{\|u_5\|} = \begin{matrix} \frac{-2+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Dari proses gram-scmidt maka diperoleh matriks P yang mendiagonalisasi matriks A sebagai berikut:

$$P = \begin{matrix} \frac{1}{2\sqrt{7}} - \frac{1}{2\sqrt{7}} i & \frac{-1}{\sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{21}} i & 0 & 0 & \frac{-2+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{2\sqrt{7}} - \frac{1}{2\sqrt{7}} i & -\frac{3}{\sqrt{21}} - \frac{1}{\sqrt{21}} i & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{3}{\sqrt{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan apakah matriks P tersebut merupakan vektor-vektor yang ortogonal dan ortonormal dengan pembuktian sebagai berikut:

a. Buktikan bahwa vektor tersebut ortonormal dengan menentukan norma dari vektor baris $P = 1$ sebagai berikut:

$$\|P_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{7}} i\right)^2 + \left(\frac{3}{2\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{7}} i\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} = 1$$

$$\|P_2\| = \sqrt{\left(\frac{3}{2\sqrt{7}} - \frac{1}{2\sqrt{7}} i\right)^2 + \left(-\frac{3}{\sqrt{21}} - \frac{1}{\sqrt{21}} i\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

$$\|P_3\| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{21}}\right)^2} = 1$$

$$\|P_4\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\|P_5\| = \sqrt{1} = 1$$

b. Buktikan bahwa P adalah ortogonal sebagai berikut:

$$P_1 . P_2 = \frac{1+i}{2\sqrt{7}} . \frac{3-\bar{i}}{2\sqrt{7}} + \frac{3-i}{2\sqrt{7}} . \frac{-3-\bar{i}}{\sqrt{21}} + \frac{2}{\sqrt{7}} . \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh:

$$P_1 . P_2 = P_1 . P_3 = P_1 . P_4 = P_1 . P_5 = P_2 . P_3 = P_2 . P_4 = P_2 . P_5 = P_3 . P_4 = P_3 . P_5 = P_4 . P_5 = 0$$

Sehingga vektor-vektor baris P membentuk sebuah himpunan yang ortogonal.

7. Membuktikan P dengan menunjukkan $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal atau $P^{-1}AP = D$.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{7}}i & \frac{3}{2\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{7}}i & \frac{2}{\sqrt{7}} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{21}} - \frac{1}{\sqrt{21}}i & -\frac{3}{\sqrt{21}} - \frac{1}{\sqrt{21}}i & \frac{3}{\sqrt{21}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-2+i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $P^{-1}AP = D$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{7}} - \frac{1}{2\sqrt{7}}i & \frac{-1}{\sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{21}}i & 0 & 0 & \frac{-2+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{2\sqrt{7}} - \frac{1}{2\sqrt{7}}i & -\frac{3}{\sqrt{21}} - \frac{1}{\sqrt{21}}i & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{3}{\sqrt{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-i & 0 & 0 \\ 1+i & 3+i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{7}}i & \frac{3}{2\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{7}}i & \frac{2}{\sqrt{7}} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{21}} - \frac{1}{\sqrt{21}}i & -\frac{3}{\sqrt{21}} - \frac{1}{\sqrt{21}}i & \frac{3}{\sqrt{21}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-2+i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$$

Berdasarkan pembuktian diatas maka jelaslah bahwa matriks A dapat didiagonalisasikan secara uniter oleh matriks P.

4.3 Dioganalisasi secara Uniter Ordo 6×6

Matriks hermitian dapat didiagonalisasikan secara uniter dengan langka-langkah yang telah dijelaskan pada bab metodologi penelitian. Selanjutnya akan dijelaskan diagonalisasi pada matriks hermitian untuk ordo 6×6 melalui contoh berikut:

Contoh 4.3

Diberikan matrik $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2+i & 0 \\ -2i & 0 & 1 & -3-i & 0 & -1+i \\ 0 & 0 & -3+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-i & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan matriks P yang dapat mendiagonalisasikan matriks S secara uniter?

Penyelesaian:

1. Menentukan apakah matriks tersebut merupakan matriks hermitian yaitu dengan membuktikan $S = S^*$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2+i & 0 \\ -2i & 0 & 1 & -3-i & 0 & -1+i \\ 0 & 0 & -3+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2-i & 0 \\ 2i & 0 & 1 & -3+i & 0 & -1-i \\ 0 & 0 & -3-i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+i & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Maka $\bar{S}^T = S^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2+i & 0 \\ -2i & 0 & 1 & -3-i & 0 & -1+i \\ 0 & 0 & -3+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-i & 0 & 1 \end{bmatrix} = S$

Karena $S = S^*$ maka matriks S dikatakan matriks hermitian.

2. Menentukan polinomial karakteristik dari matriks S.

Dengan menggunakan Maple.13 maka diperoleh polinomial karakteristik dari matriks S ialah $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 19\lambda^4 + 64\lambda^3 + 75\lambda^2 - 252\lambda + 135 = 0$

3. Menentukan nilai eigen dari matriks S dengan memfaktorkan polinomial dari matriks S sebagai berikut:

$$\lambda^6 - 4\lambda^5 - 19\lambda^4 + 64\lambda^3 + 75\lambda^2 - 252\lambda + 135 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 5)(\lambda + 3)^2(\lambda - 1)^2 = 0$$

Sehingga nilai eigen dari matriks S adalah:

$\lambda = 3,\ \lambda = 5,\ \lambda = -3,\ \lambda = 1$

4. Menentukan vektor eigen

Untuk menentukan vektor-vektor eigen dari matriks S dapat dilakukan dengan operasi baris elementer dengan persamaan $\lambda I - S = 0$

$$\begin{matrix} \lambda - 1 & 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 & 0 & -2 - i & 0 \\ 2i & 0 & \lambda - 1 & 3 + i & 0 & 1 - i \\ 0 & 0 & 3 - i & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 + i & 0 & 0 & \lambda + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + i & 0 & \lambda - 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \tag{4.3}$$

untuk $\lambda = 5$ berdasarkan persamaan (4.3) maka diperoleh

$$\begin{matrix} 4 & 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 - i & 0 \\ 2i & 0 & 4 & 3 + i & 0 & 1 - i \\ 0 & 0 & 3 - i & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 + i & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + i & 0 & 4 \end{matrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka diperoleh vektor eigen untuk $\lambda = 5$ adalah

$$u_1 = \begin{matrix} -1 - i \\ 0 \\ -2 + 2i \\ 1 - 2i \\ 0 \\ 1 \end{matrix} .$$

untuk $\lambda = 3$ berdasarkan persamaan (4.3) maka diperoleh

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 - i & 0 \\ 2i & 0 & 2 & 3 + i & 0 & 1 - i \\ 0 & 0 & 3 - i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 + i & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + i & 0 & 2 \end{matrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka diperoleh vektor eigen untuk $\lambda = 3$ adalah

$$u_2 = \begin{matrix} 0 \\ 2 + i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} .$$

untuk $\lambda = -3$ berdasarkan persamaan (4.3) maka diperoleh

$$\begin{matrix} -4 & 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & -2-i & 0 \\ 2i & 0 & -4 & 3+i & 0 & 1-i \\ 0 & 0 & 3-i & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2+i & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+i & 0 & -4 \end{matrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka diperoleh vektor eigen untuk $\lambda = -3$ adalah

$$u_3 = \begin{matrix} 0 \\ \frac{-2-i}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{dan} \quad u_4 = \begin{matrix} -1-i \\ 0 \\ 2-2i \\ 1-2i \\ 0 \\ 1 \end{matrix} .$$

untuk $\lambda = 1$ berdasarkan persamaan (4.3) maka diperoleh

$$\begin{matrix} 0 & 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2-i & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 3+i & 0 & 1-i \\ 0 & 0 & 3-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2+i & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+i & 0 & 4 \end{matrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka diperoleh vektor eigen untuk $\lambda = 1$ adalah

$$u_5 = \begin{matrix} \frac{1+i}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \quad \text{dan} \quad u_6 = \begin{matrix} \frac{-1+3i}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} .$$

5. Berdasarkan vektor-vektor eigen yang telah diperoleh maka akan ditentukan basis orthogonal dengan menggunakan proses gram-Schmidt.

   Diketahui vektor-vektor u sebagai berikut:

   $u_1 = -1-i, 0, -2+2i, 0, 1$

   $u_2 = 0, 2+i, 0, 0, 1, 0$

   $u_3 = 0, \frac{-2-i}{5}, 0, 0, 1, 0$

   $u_4 = -1-i, 0, 2-2i, 1-2i, 0, 1$

$u_5 = \frac{1+i}{2}, 0, 0, 0, 0, 1$

$u_6 = \frac{-1+3i}{2}, 0, 0, 1, 0, 0$

Selanjutnya akan dilakukan proses gram-schmidt sebagai berikut:

$w_1 = u_1$

$w_1 = -1 - i, 0, -2 + 2i, 0, 1$

$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$

$w_2 = 0, 2 + i, 0, 0, 1, 0$

$w_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$

$w_3 = 0, \frac{-2-i}{5}, 0, 0, 1, 0$

$w_4 = u_4 - \frac{\langle u_4, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle u_4, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle u_4, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3$

$w_4 = -1 - i, 0, 2 - 2i, 1 - 2i, 0, 1$

$w_5 = u_5 - \frac{\langle u_5, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle u_5, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle u_5, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 - \frac{\langle u_5, w_4 \rangle}{\langle w_4, w_4 \rangle} w_4$

$u_5 = \frac{1+i}{2}, 0, 0, 0, 0, 1$

$w_6 = u_6 - \frac{\langle u_6, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle u_6, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle u_6, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 - \frac{\langle u_6, w_4 \rangle}{\langle w_4, w_4 \rangle} w_4 - \frac{\langle u_6, w_5 \rangle}{\langle w_5, w_5 \rangle} w_5$

$w_6 = \frac{-1}{3} + i, 0, 0, 1, 0, \frac{-1-2i}{3}$

a. Menentukan kolom pertama P_1 dengan mencari $\|w_1\|$ terlebih dahulu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \|w_1\| &= \sqrt{|1+i|^2 + |-2+2i|^2 + |1-2i|^2 + |1|^2} \\ &= \sqrt{2 + 8 + 5 + 1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh P_1 adalah:

$$P_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{matrix} \frac{-1-i}{4} \\ 0 \\ \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1}{4} - \frac{i}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{matrix}$$

b. Menentukan kolom kedua P_2 dengan mencari $\|w_2\|$ terlebih dahulu sebagai berikut:

$$\|w_2\| = \sqrt{|2+i|^2 + |1|^2}$$
$$= \sqrt{5+1}$$
$$= \sqrt{6}$$

maka akan didapat p_2 adalah:

$$p_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{matrix} 0 \\ \frac{2+i}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{matrix}$$

c. Menentukan kolom ketiga P_3 dengan mencari $\|w_3\|$ terlebih dahulu sebagai berikut:

$$\|w_3\| = \sqrt{\left|\frac{-2-i}{5}\right|^2 + |1|^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{5} + 1}$$
$$= \sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$p_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \begin{matrix} 0 \\ \frac{-2-i}{\sqrt{30}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \\ 0 \end{matrix}$$

d. Menentukan kolom keempat P_4 dengan mencari $\|w_4\|$ terlebih dahulu sebagai berikut:

$$\|w_4\| = \sqrt{|1+i|^2 + |2-2i|^2 + |1-2i|^2 + |1|^2}$$
$$= \sqrt{2+8+5+1}$$
$$= 4$$

maka akan didapat p_4 sebagai berikut:

$$p_4 = \frac{w_4}{\|w_4\|} = \begin{matrix} \frac{-1-i}{4} \\ 0 \\ \frac{1+i}{2} \\ \frac{1}{4} - \frac{i}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{matrix}$$

e. Menentukan kolom kelima P_5 dengan mencari $\|w_5\|$ terlebih dahulu sebagai berikut:

$$\|w_5\| = \sqrt{\left|\frac{-1-i}{2}\right|^2 + |1|^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}$$

maka akan didapat p_5 sebagai berikut:

$$p_5 = \frac{w_5}{\|w_5\|} = \begin{matrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{matrix}$$

f. Menentukan kolom keenam P_6 dengan mencari $\|w_6\|$ terlebih dahulu sebagai berikut:

$$\|w_6\| = \sqrt{\left|\frac{1}{3} - i\right|^2 + |1|^2 + \left|\frac{-1-2i}{3}\right|^2}$$

$$= \sqrt{\frac{24}{9}}$$

maka akan didapat p_6 sebagai berikut:

$$p_6 = \frac{w_6}{\|w_6\|} = \begin{matrix} \frac{-1+3i}{2\sqrt{6}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{6}} - \frac{i}{\sqrt{6}} \end{matrix}$$

Dengan proses gram-scmidt maka diperoleh matriks P yang mendiagonalisasikan matriks S sebagai barikut:

$$P = \begin{matrix} \frac{-1-i}{4} & 0 & 0 & \frac{-1-i}{4} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} & \frac{-1+3i}{2\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2+i}{\sqrt{6}} & \frac{-2-i}{\sqrt{30}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1+i}{2} & 0 & 0 & \frac{1-i}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}-\frac{i}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4}-\frac{i}{2} & 0 & \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{6}}-\frac{i}{\sqrt{6}} \end{matrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan apakah matriks P merupakan vektor –vektor yang ortogonal dan ortonormal dengan melakukan pembuktian sebagai berikut:

a. Buktikan bahwa vektor tersebut ortonormal dengan menetukan norma dari vektor baris $P = 1$.

$$\|P_1\| = \sqrt{\left(\frac{-1-i}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1-i}{4}\right)^2 + \left(\frac{1+i}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-1+3i}{2\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

$$\|P_2\| = \sqrt{\left(\frac{2+i}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-2-i}{\sqrt{30}}\right)^2} = 1$$

$$\|P_3\| = \sqrt{\left(\frac{-1-i}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1-i}{2}\right)^2} = 1$$

$$\|P_4\| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}-\frac{i}{2}\right)^2 + \frac{3}{2\sqrt{6}}} = 1$$

$$\|P_5\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{5}{\sqrt{30}}} = 1$$

$$\|P_6\| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2\sqrt{6}}-\frac{i}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

b. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa P adalah ortogonal sebagai berikut:

$$P_1.P_2 = \frac{1+i}{4}.0 + 0.\frac{2+i}{\sqrt{6}} + \frac{1+i}{4}.0 + 0.\frac{-2-i}{\sqrt{30}} + \frac{-1-i}{\sqrt{6}}.0 + \frac{1-3i}{2\sqrt{6}}.0 = 0$$

Dengan menggunakan cara yang sama, maka akan diperoleh:

$P_1.P_2 = P_1.P_3 = P_1.P_4 = P_1.P_5 = P_1.P_6 = P_2.P_3 = P_2.P_4 = P_2.P_5 =$
$P_2.P_6 = P_3.P_4 = P_3.P_5 = P_3.P_6 = P_4.P_5 = P_4.P_6 = P_5.P_6 = 0$

Seingga vektor-vektor baris P membentuk sebuah himpunan yang ortogonal.

6. Membuktikan P dengan menunjukkan $P^{-1}SP$ adalah matriks diagonal atau $P^{-1}SP = D$

$$P^{-1} = \begin{matrix} \frac{-1+i}{4} & 0 & \frac{-1-i}{2} & \frac{1}{4}+\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{2-i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{-2+i}{\sqrt{30}} & 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 \\ \frac{-1+i}{4} & 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1}{4}+\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1-i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1-3i}{2\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{6}}+\frac{i}{\sqrt{6}} \end{matrix}$$

Sehingga $P^{-1}SP = D$ sebagai berikut:

$$\begin{matrix} \frac{-1+i}{4} & 0 & \frac{-1-i}{2} & \frac{1}{4}+\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{2-i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{-2+i}{\sqrt{30}} & 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 \\ \frac{-1+i}{4} & 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1}{4}+\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1-i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1-3i}{2\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{6}}+\frac{i}{\sqrt{6}} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 & 0 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2+i & 0 \\ -2i & 0 & 1 & -3-i & 0 & -1+i \\ 0 & 0 & -3+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-i & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{-1-i}{4} & 0 & 0 & \frac{-1-i}{4} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} & \frac{-1+3i}{2\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2+i}{\sqrt{6}} & \frac{-2-i}{\sqrt{30}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1+i}{2} & 0 & 0 & \frac{1-i}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}-\frac{i}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4}-\frac{i}{2} & 0 & \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{6}}-\frac{i}{\sqrt{6}} \end{matrix} = \begin{matrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} = D$$

Berdasarkan pembuktian di atas maka jelaslah bahwa matriks S dapat didiagonalkan secara uniter oleh matriks P.

Contoh 4.4

Diberikan matrik $T = \begin{matrix} 1 & 0 & -1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1-i & 0 & 0 & 3-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

Tentukan matriks P yang dapat mendiagonalisasikan matriks T secara uniter?

Penyelesaian:

1. Menentukan apakah matriks tersebut merupakan matriks hermitian yaitu dengan membuktikan $T = T^{*}$

$$T = \begin{matrix} 1 & 0 & -1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1-i & 0 & 0 & 3-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\bar{T} = \begin{matrix} 1 & 0 & -1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1+i & 0 & 0 & 3+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Sehingga $\bar{T}^T = T^{*} \begin{matrix} 1 & 0 & -1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1-i & 0 & 0 & 3-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} = T$

Karena $T = T^{*}$ maka matriks T dikatakan matriks hermitian.

2. Menentukan polinomial karakteristik dari matriks T.

Dengan menggunakan Maple.13 maka diperoleh polinomial karakteristik dari matriks T ialah $\lambda^6 - \lambda^5 - 14\lambda^4 + 2\lambda^3 + 25\lambda^2 - x\lambda - 12 = 0$

3. Menentukan nilai eigen dari matriks T dengan memfaktorkan polinomial dari matriks T sebagai berikut:

$\lambda^6 - \lambda^5 - 14\lambda^4 + 2\lambda^3 + 25\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$

$\lambda + 3 \quad \lambda - 4 \quad (\lambda - 1)^2 \; (\lambda + 1)^2 = 0$

Sehingga nilai eigen dari matriks T adalah:

$\lambda = -3,\ \lambda = 4,\ \lambda = 1,\ \lambda = -1$

4. Menentukan vektor eigen

Untuk menentukan vektor-vektor eigen dari matriks T dapat dilakukan dengan operasi baris elementer dengan persamaan $\lambda I - T = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+i & 0 & \lambda & -3+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+i & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

untuk $\lambda = 3$ berdasarkan persamaan (4.4) maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1-i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+i & 0 & 3 & -3+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+i & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka diperoleh vektor eigen untuk $\lambda = 3$ adalah

$$u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{2i}{5} \\ 0 \\ -\frac{6}{5} + \frac{2i}{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

untuk $\lambda = 4$ berdasarkan persamaan (4.4) maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1-i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+i & 0 & 4 & -3+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+i & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka diperoleh vektor eigen untuk $\lambda = 4$ adalah

$$u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{2i}{5} \\ 0 \\ \frac{9}{10} - \frac{3i}{10} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

untuk $\lambda = 1$ berdasarkan persamaan (4.4) maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+i & 0 & 1 & -3+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka diperoleh vektor eigen untuk $\lambda = 1$ adalah

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad u_4 = \begin{bmatrix} 1-2i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

untuk $\lambda = -1$ berdasarkan persamaan (4.4) maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+i & 0 & -1 & -3+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+i & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer maka diperoleh vektor eigen untuk $\lambda = -1$ adalah

$$u_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad u_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Berdasarkan vektor-vektor eigen yang telah diperoleh maka akan ditentukan basis ortogonal dengan menggunakan proses gram- Schmidt.

a. Menentukan kolom pertama P_1 dengan mencari $\|u_1\|$ terlebih dahulu sebagai berikut:

$$\|u_1\| = \sqrt{\left\|\frac{-1}{5} - \frac{2i}{5}\right\|^2 + \|0\|^2 + \left\|\frac{-6}{5} - \frac{2i}{5}\right\|^2 + \|1\|^2}$$

$$= \sqrt{\frac{14}{5}}$$

sehingga diperoleh P_1 adalah:

$$p_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{70}} + \frac{2}{\sqrt{70}}i \\ 0 \\ \frac{-6}{\sqrt{70}} + \frac{2}{\sqrt{70}}i \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b. Menentukan kolom kedua P_2 dengan mencari $\|u_2\|$ terlebih dahulu sebagai berikut:

$$\|u_2\| = \sqrt{\left|-\frac{1}{5} + \frac{2i}{5}\right|^2 + |0|^2 + \left|\frac{9}{10} - \frac{3i}{10}\right|^2 + |1|^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{9}{10} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{210}{10}}$$

maka akan didapat p_2 adalah:

$$p_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{210}} + \frac{4}{\sqrt{210}}i \\ 0 \\ \frac{9}{\sqrt{210}} - \frac{3}{\sqrt{210}}i \\ \frac{10}{\sqrt{210}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c. Menentukan kolom ketiga P_3 dengan $u_3 = P_3$ karena telah ortogonal sehingga P_3 adalah

$$p_3 = u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d. Menentukan kolom keempat P_4 dengan mencari $\|u_4\|$ terlebih dahulu sebagai berikut:

$$\|u_4\| = \sqrt{|1 - 2i|^2 + |1|^2}$$

$$= \sqrt{5 + 1}$$

$$= \sqrt{6}$$

maka akan didapat p_4 sebagai berikut:

$$p_4 = \frac{u_4}{\|u_4\|} = \begin{matrix} \frac{1-2i}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

e. Menentukan kolom kelima dan keenam P_5 dan P_6 , karena telah ortogonal sehingga P_5 dan P_6 adalah

$$p_5 = u_5 = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{dan} \quad p_6 = u_6 = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Dengan proses gram-scmidt maka diperoleh matriks P yang mendiagonalisasikan matriks T sebagai barikut:

$$P = \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{70}} + \frac{2}{\sqrt{70}}i & \frac{-2}{\sqrt{210}} + \frac{4}{\sqrt{210}}i & 0 & \frac{1-2i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-6}{\sqrt{70}} + \frac{2}{\sqrt{70}}i & \frac{9}{\sqrt{210}} - \frac{3}{\sqrt{210}}i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{10}{\sqrt{210}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan apakah matriks P merupakan vektor –vektor yang ortogonal dan ortonormal dengan melakukan pembuktian sebagai berikut:

a. Buktikan bahwa vektor tersebut ortonormal dengan menetukan norma dari vektor baris $P = 1$.

$$\|P_1\| = \sqrt{-\frac{1}{\sqrt{70}} - \frac{2}{\sqrt{70}}i^{\;2} + \frac{-6}{\sqrt{70}} - \frac{2}{\sqrt{70}}i^{\;2} + \frac{5}{\sqrt{70}}^{\;2}} = 1$$

$$\|P_2\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\|P_3\| = \sqrt{\frac{-6}{\sqrt{70}} + \frac{2}{\sqrt{70}}i^{\;2} + \frac{9}{\sqrt{210}} - \frac{3}{\sqrt{210}}i^{\;2}} = 1$$

$$\|P_4\| = \sqrt{\frac{5}{\sqrt{70}}^{\;2} + \frac{10}{\sqrt{210}}^{\;2} + \frac{1}{\sqrt{6}}} = 1$$

$\|P_5\| = \sqrt{1} = 1$

$\|P_6\| = \sqrt{1} = 1$

b. Akan dibuktikan bahwa P adalah ortogonal sebagai berikut:

$$P_1.P_2 = -\frac{1-2i}{\sqrt{70}}.0 + \frac{-6-2i}{\sqrt{70}}.0 + \frac{5}{\sqrt{70}}.0 + 0.1 = 0$$

Dengan menggunakan cara yang sama, maka akan diperoleh:

$$P_1.P_2 = P_1.P_3 = P_1.P_4 = P_1.P_5 = P_1.P_6 = P_2.P_3 = P_2.P_4 = P_2.P_5 =$$
$$P_2.P_6 = P_3.P_4 = P_3.P_5 = P_3.P_6 = P_4.P_5 = P_4.P_6 = P_5.P_6 = 0$$

Seingga vektor-vektor baris P membentuk sebuah himpunan yang ortogonal.

6. Membuktikan P dengan menunjukkan $P^{-1}TP$ adalah matriks diagonal atau $P^{-1}TP = D$

$$P^{-1} = \begin{matrix} -\frac{1}{\sqrt{70}} - \frac{2}{\sqrt{70}}i & 0 & \frac{-6}{\sqrt{70}} - \frac{2}{\sqrt{70}}i & \frac{5}{\sqrt{70}} & 0 & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{210}} - \frac{4}{\sqrt{210}}i & 0 & \frac{9}{\sqrt{210}} + \frac{3}{\sqrt{210}}i & \frac{10}{\sqrt{210}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1+2i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Sehingga $P^{-1}TP = D$ sebagai berikut:

$$\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{70}} + \frac{2}{\sqrt{70}}i & \frac{-2}{\sqrt{210}} + \frac{4}{\sqrt{210}}i & 0 & \frac{1-2i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-6}{\sqrt{70}} + \frac{2}{\sqrt{70}}i & \frac{9}{\sqrt{210}} - \frac{3}{\sqrt{210}}i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{10}{\sqrt{210}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} . \begin{matrix} 1 & 0 & -1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1-i & 0 & 0 & 3-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{-1-2i}{\sqrt{70}} & 0 & \frac{-6}{\sqrt{70}} - \frac{2}{\sqrt{70}}i & \frac{5}{\sqrt{70}} & 0 & 0 \\ \frac{-2-4i}{\sqrt{210}} & 0 & \frac{9}{\sqrt{210}} + \frac{3}{\sqrt{210}}i & \frac{10}{\sqrt{210}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1+2i}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} = D$$

Berdasarkan pembuktian di atas maka jelaslah bahwa matriks T dapat didiagonalkan secara uniter oleh matriks P.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada Bab IV mengenai hasil dari diagonalisasi secara uniter pada matriks hermitian dengan ordo 5×5 dan 6×6 dapat diperoleh matriks yang diagonal sebagai berikut:

a. Untuk contoh 4.1 diperoleh hasil matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{matrix}$$

b. Untuk contoh 4.2 diperoleh hasil matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{matrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

c. Untuk contoh 4.3 diperoleh hasil matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{matrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

d. Untuk contoh 4.4 diperoleh hasil matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{matrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

Maka dapat disimpulkan bahwa diagonalisasi secara uniter dengan matriks uniter $A^{-1} = A^{*}$, dan matriks hermitian $A = A^{*}$ yang memenuhi persamaan $P^{-1}AP$ dengan P adalah matriks uniter yang mendiagonalisasi matriks hermitian pada ordo 5×5 dan 6×6 sehingga diperoleh matriks diagonal D dengan entri bilangan riil.

5.2 Saran

Tugas akhir ini membahas mengenai diagonalisasi secara uniter pada matriks hermitian ordo 5×5 dan 6×6 dengan menggunakan bantuan Maple.13 dalam penyelesaiannya. Oleh karena itu bagi pembaca disarankan dapat mengembangkan skripsi ini kepada ordo yang lebih tinggi atau dengan menggunakan metode yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Anton dan Rorres, *Aljabar Linear Elementer*, jilid 1, Erlangga. Jakarta, 2004.

Anton dan Rorres, *Aljabar Linear Elementer*, jilid 2, Erlangga. Jakarta, 2006.

Lipschutz, Seymour and Marc Lipsons. *Aljabar Linier*, Erlangga. Jakarta, 2006.

Supranto.J. *Pengantar matriks*, Fakultas ekonomi UI: Jakarta 1993.

Selamed, *Diagonalisasi Secara Uniter pada Matriks Hermite*, Tugas Akhir Mahasiswa UIN Malang, 2008.

Hasugian, jimmy dan agus prijono, *Analisis Kompleks dalam Matematika Teknik*. Rekayasa sains. Bandung. 2006.

Palicuras, John D. *Peubah kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*, Erlangga. Jakarta, 1987